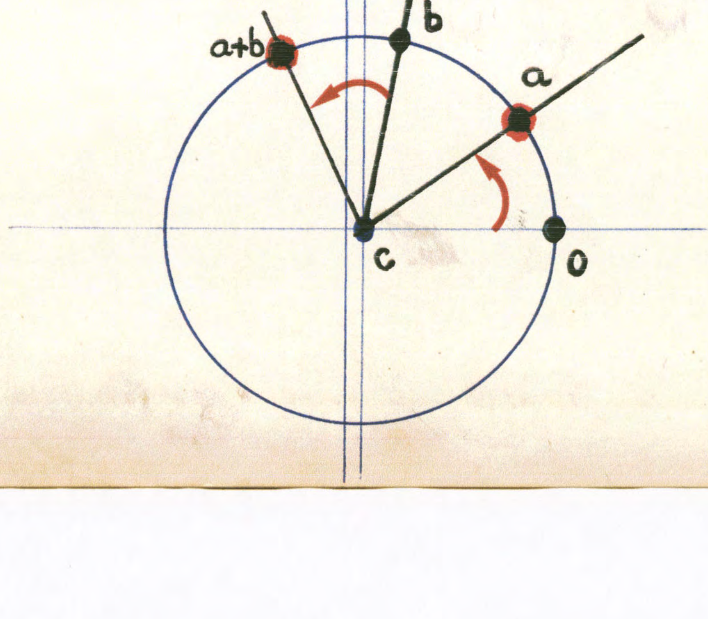
LE GROUPE TOPOLOGIQUE DES ANGLES.

▲ C_0 = cercle du plan euclidien Π
de centre c et de rayon non nul r
et dont un point est marqué o.

Tout cercle euclidien non nul est cycle rectifiable
C_0 s'érige naturellement en un groupe topologique
isomorphe au groupe topologique des réels modulo un.
A titre exceptionnel nous rappellerons que cette addition est définie par la théorie des cycles rectifiables en la notant $\oplus$

Tout point a de C_0 représentant l'angle de la rotation de centre c qui applique o sur a, le cercle pointé C_0 s'identifie au groupe des angles A,+.

$\forall a, b \in C_0$: a+b est l'image de b par la rotation de centre c et d'angle a (c'est à dire de la rotation de centre c qui applique o sur a)



$$\boxed{C_0, \oplus \quad = \quad C_0, +}$$

* Orientons C_0

Le sens de C_0 ordonne ses arcs fermés

- $\forall x \in C_0 \qquad s(x) = \text{long } \overset{\frown}{ox}$
- $a, b \in C_0$
- $d = a + b$ (addition <u>angulaire</u>)

$=$ image de b par la rotation de centre c qui applique o sur a.

Toute rotation de centre c définit un auto du cercle orienté C_0. La rotation de centre c qui applique o sur b applique $\overset{\frown}{oa}$ sur $\overset{\frown}{bd}$

$s(a) = \text{long } \overset{\frown}{oa} = \text{long } \overset{\frown}{bd}$

$s(a) \in [0, 2\pi r[$	$s(b) \in [0, 2\pi r[$
ou bien	ou bien
$s(a) + s(b) \in [0, 2\pi r[$	$s(a) + s(b) \in [2\pi r, 4\pi r[$
$s(d) = s(a) + s(b)$	$s(d) = s(a) + s(b) - 2\pi r$

Dans tous les cas

$$s(d) + 2\pi r\mathbb{Z} = s(a) + s(b) + 2\pi r\mathbb{Z}$$

$$s(d) + 2\pi r\mathbb{Z} = (s(a) + 2\pi r\mathbb{Z}) + (s(b) + 2\pi r\mathbb{Z})$$

$$d = a \oplus b$$

$$a + b = a \oplus b$$

■

Le groupe des angles est groupe topologique $A, +, \mathcal{T}_{us}$ isomorphe au groupe topologique $R/Z, +, \mathcal{T}_{us}$

✲ Le cercle $C_o, +, \mathcal{T}_{us}$ est modèle parfait de $A, +, \mathcal{T}_{us}$.

$C_o, \oplus, \mathcal{T}_{us} = C_o, +, \mathcal{T}_{us}$ est groupe topologique isomorphe à $R/Z, +, \mathcal{T}_{us}$ ■

Le groupe $\mathcal{R}_c$ des rotations de centre c du plan Π est un groupe topologique isomorphe au groupe topologique des angles ■

■

Pour tout cercle euclidien (de rayon non nul) C_o

Les (deux) enroulements métriques euclidiens $e : R \to C_o$

sont EPIMORPHISMES CONTINUS

du groupe topologique des réels $R, +, \mathcal{T}_{us}$

sur le groupe topologique $C_o, +, \mathcal{T}_{us}$

✲ Cela résulte des deux faits suivants :

Tout enroulement périodique est un épi continu $R, +, \mathcal{T}_{us} \to C_o, +_e, \mathcal{T}_{us}$ (cf chap. 17)

Si C est un cercle euclidien
Alors $C_o, +_e, \mathcal{T}_{us} = C_o, \oplus, \mathcal{T}_{us} = C_o, +, \mathcal{T}_{us}$ ■

■

Le groupe des angles est un groupe topologique $A, +, \mathcal{T}_{us}$ commutatif, divisible ... isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +\mathcal{T}_{us}$

* Tout cercle $C_o, +$ est un modèle parfait de $A, +$

Tout cercle $C_o, +, \mathcal{T}$ est un groupe topologique

Tous les cercles métriques pointés sont des groupes topologiques isomorphes. ■

Le groupe $\mathcal{R}_c$ des rotations de centre c du plan Π est un groupe topologique isomorphe au groupe topologique des angles.